Medição directa da distancia dos pulsares

António Saraiva -- 2005-12-05
Ajps2@hotmail.com

Introdução -- A formula utilizada actualmente para o calculo da dispersão das ondas de rádio no vazio interestelar não permite o calculo da distancia dos pulsares.
Neste artigo demonstramos que a fórmula exacta da dispersão no vazio permite esse cálculo.

Das equações de Lorentz:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_0 + vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t = \dfrac{t_0 + vx_0/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2(c^2{t_0}^2 + x^2) + 2vc^2 x_0 t_0 + c^2({x_0}^2 - x^2) = 0 \\ v^2(c^2 t^2 + {x_0}^2) + 2vc^2 x_0 t_0 + c^4({t_0}^2 - t^2) = 0 \end{cases}$$

Igualando os coeficientes:

$$\Leftrightarrow \quad c^2 t^2 - x^2 = c^2 {t_0}^2 - {x_0}^2$$

Assim para todo e qualquer v

$$\Leftrightarrow \quad c^2 {t_n}^2 - {x_n}^2 = k \quad \text{ou} \quad {x_n}^2 - c^2 {t_n}^2 = k \quad (k = \text{constante})$$

Fazendo $w_n = x_n / t_n$ e $f_n = 1/t_n$ $\Leftrightarrow$

$$w_n = \sqrt{c^2 - k{f_n}^2} \quad (1) \quad \text{ou} \quad w_n = \sqrt{c^2 + k{f_n}^2} \quad (2)$$

c é a velocidade da luz no vazio, f_n é a frequência da onda e w_n é a sua velocidade de propagação. Estas fórmulas estão relacionadas com a dispersão positiva (1) e a dispersão negativa (2). Como sabemos, pela experiência, o vazio interestelar tem dispersão negativa.

$$w = x/t \quad ; \quad w_0 = x_0/t_0 \quad ; \quad w = \sqrt{c^2 + kf^2} \quad ; \quad w_0 = \sqrt{c^2 + k{f_0}^2}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_0 + vt_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \\ t = \dfrac{t_0 + vx_0 / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = c^2 \dfrac{w_0 + v}{c^2 + vw_0} \\ f = \dfrac{cf_0 \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 + vw_0} \end{cases}$$

Dedução da formula exacta da dispersão no vazio interestelar

De acordo com outros estudos que realizámos sabemos que v se comporta como uma constante.

$$w = c^2 \frac{\sqrt{c^2 + kf_0^{\ 2}} + v}{c^2 + v\sqrt{c^2 + kf_0^{\ 2}}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dw}{df_0} = c^2 kf_0 \frac{c^2 - v^2}{\left(c^2 + v\sqrt{c^2 + kf_0^{\ 2}}\right)^2 \sqrt{c^2 + kf_0^{\ 2}}}$$

$$f = \frac{cf_0 \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 + v\sqrt{c^2 + kf_0^{\ 2}}} \quad \Leftrightarrow \quad c^2 - v^2 = \frac{f^2 \left(c^2 + v\sqrt{c^2 + kf_0^{\ 2}}\right)^2}{c^2 f_0^{\ 2}}$$

$$\frac{dw}{df_0} = \frac{kf^2}{f_0 \sqrt{c^2 + kf_0^{\ 2}}} \quad \text{e} \quad kf^2 = w^2 - c^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dw}{w^2 - c^2} = \frac{df_0}{f_0 \sqrt{c^2 + kf_0^{\ 2}}} \quad \Leftrightarrow$$

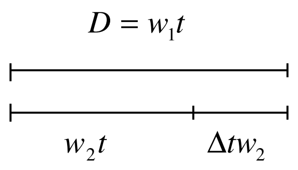
$$\Leftrightarrow \quad \log\left|\frac{w + c}{w - c}\right| + 2\log\left|\frac{kf_0}{c + \sqrt{c^2 + kf_0^{\ 2}}}\right| = \log R \quad \text{e} \quad \sqrt{c^2 + kf_0^{\ 2}} \approx c$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{w + c}{w - c} = R \frac{4c^2}{k^2 f_0^{\ 2}} \quad \text{e} \quad \frac{4c^2 R}{k^2} = F^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad w = c \frac{F^2 + f_0^{\ 2}}{F^2 - f_0^{\ 2}}$$

Esta é a fórmula exacta da velocidade de propagação da luz no vazio em função da frequência da onda. Note-se que a velocidade w e a frequência f_0 estão em referenciais distintos.

Desfasamento em tempo de duas frequências



$$\Delta t = D\frac{w_1 - w_2}{w_1 w_2}$$

$$w_1 = c\frac{F^2 + f_1^{\ 2}}{F^2 - f_1^{\ 2}} \quad ; \quad w_2 = c\frac{F^2 + f_2^{\ 2}}{F^2 - f_2^{\ 2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Delta t = \frac{2DF^2}{c}\frac{f_1^{\ 2} - f_2^{\ 2}}{(F^2 + f_1^{\ 2})(F^2 + f_2^{\ 2})}$$

Esta é fórmula exacta da dispersão no vazio interestelar. Verifica-se que esta formula é semelhante á formula usada actualmente.

$$F^2 << f_1^{\ 2} \quad \text{e} \quad F^2 << f_2^{\ 2} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta t = \frac{2DF^2}{c}\frac{f_1^{\ 2} - f_2^{\ 2}}{f_1^{\ 2} f_2^{\ 2}}$$

Se F for a frequência do plasma frio de electrões do meio:

$$F^2 = \frac{n_e q_e^{\ 2}}{m_e \varepsilon_0}$$

q_e -- carga do electrão; m_e -- massa do electrão; ε_0 -- permitividade do vazio;
n_e -- numero de electrões por volume.

$$\Delta t = 2.12 \times 10^{-5} \ \frac{f_1^{\ 2} - f_2^{\ 2}}{f_1 2 f_2^{\ 2}} D n_e \qquad (\text{ unidades SI })$$

A fórmula usual é:

$$\Delta t = 4.15 \times 10^3 \frac{f_1^{\ 2} - f_2^{\ 2}}{f_1^{\ 2} f_2^{\ 2}} DM \qquad (\text{ não SI })$$

Mas a formula exacta que deduzimos permite o cálculo directo da distância D se fizermos duas medições com dois pares de frequências.

Calculo da distancia

$$\begin{cases} \Delta t_A = \dfrac{2DF^2}{c}\dfrac{f_1^{\,2} - f_2^{\,2}}{(F^2 + f_1^{\,2})(F^2 + f_2^{\,2})} \\ \Delta t_B = \dfrac{2DF^2}{c}\dfrac{f_3^{\,2} - f_4^{\,2}}{(F^2 + f_3^{\,2})(F^2 + f_4^{\,2})} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{\Delta t_B (f_1^{\,2} - f_2^{\,2})}{\Delta t_A (f_3^{\,2} - f_4^{\,2})}$$

$$F^2 = \frac{a(f_3^{\,2} + f_4^{\,2}) - (f_1^{\,2} + f_2^{\,2}) - \sqrt{(f_1^{\,2} + f_2^{\,2} - a(f_3^{\,2} + f_4^{\,2}))^2 - 4(1-a)(f_1^{\,2} f_2^{\,2} - a f_3^{\,2} f_4^{\,2})}}{2(1-a)}$$

$$D = \frac{\Delta t_A c}{2F^2}\frac{(F^2 + f_1^{\,2})(F^2 + f_2^{\,2})}{f_1^{\,2} - f_2^{\,2}}$$

É assim possível medir a distância de um pulsar, ou de qualquer outro objecto com emissão variável, por observação directa.

Na prática o cálculo para ser preciso obriga a alguns limites nos valores das frequências e das larguras de banda. Por exemplo para o pulsar de Vela $F = 1.95 \times 10^3$.