the general science journal

«Последняя загадка Пьера Ферма-2»

Некоторое время назад я опубликовал работу «Последняя загадка Пьера Ферма» в которой записал доказательство Большой теоремы Ферма (http://wbabin.net/mitkovsky/mitkovsky6.pdf, http://wbabin.net/mitkovsky/mitkovsky6r.pdf). Доказательство было написано в виде математических формул, но принцип доказательства, как мне кажется, оказался непонятен математикам, которые знакомились с этой работой. Поэтому в настоящей работе я более подробно изложу принципы доказательства теоремы, для того, чтобы это доказательство было проще понять.
Возможно, причина того, что математики так долго не могли доказать Последнюю Теорему Ферма, заключается в том, что эту теорему пытались решить сложными способами. В действительности решение этой задачи простое, настолько простое, что время, затраченное на описание доказательства, намного больше, чем само доказательство Теоремы.
Для того, чтобы это понять, нужно представить ход мыслей Пьера Ферма и, не доказать теорему, а вывести ее. Любому человеку, обладающему определенным математическим складом ума и пространственным воображением, не составит труда понять рассуждения, которые приведут к искомым выводам. Для этого мы забудем, что существует Большая Теорема Ферма и вспомним теорему Пифагора.

Мы знаем, что любой квадрат можно разложить на два квадрата.
Примем, что сторона квадрата, который мы раскладываем на два квадрата, будет равна z, стороны квадратов, на которые мы раскладываем квадрат со стороной z, будут равны x и y_1.
Запишем:

$$x^2+y_1^2=z^2 \qquad (1)$$

Формула (1) означает, что площадь квадрата со стороной z равна сумме площадей двух квадратов, один из которых имеет сторону x, сторона другого равна y_1.
Мы не будем рассматривать все варианты разложения квадратов, рассмотрим лишь один из них, в котором z и x – целые положительные числа.
Известно что, если в формуле (1) z и x – целые положительные числа, то y_1 может быть либо целым, либо иррациональным числом. Это было известно за несколько веков до нашей эры и, естественно, об этом знал Пьер Ферма.
Представим далее, что Пьер Ферма, читая «Арифметику», в которой Диофант описывал задачи разложения квадратов, задал себе вопрос – «Что будет, если к этим преобразования добавить еще одно измерение – высоту?».
Давайте ответим на этот вопрос.
Добавим к квадрату со стороной z высоту, равную z. Мы получим куб, объем которого равен z^3. Если к квадратам, на которые мы раскладываем z^2, то есть x^2 и y_1^2добавить такую же высоту, то мы получим, что куб с объемом z^3 состоит из двух геометрических фигур – прямого параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат со стороной x и имеющего высоту z, и прямого параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат со стороной y_1 имеющего высоту z. В дальнейшем мы не будем уточнять, что параллелепипеды прямые, т.к. все параллелепипеды, используемые в дальнейших рассуждениях, являются прямыми.
Запишем формулу:

$$x^2 z+y_1^2z=z^3 \qquad (2)$$

Формула (2) вытекает из теоремы Пифагора и не подвергается сомнениям.
Рассмотрим слагаемые в формуле (2).
Так, как мы приняли, что z и x – целые положительные числа, следует, что объем куба со стороной z есть целое положительное число, и объем параллелепипеда $x^2 z$ есть тоже целое положительное число.
Если y_1 – целое положительное число, то объем параллелепипеда с основанием y_1^2 и высотой z будет натуральным числом.
Если y_1 – иррациональное число, то объем параллелепипеда с основанием y_1^2 и высотой z будет иррациональным числом. Это понятно, так, как иррациональное число, возведенное в квадрат и умноженное на целое число, не может быть натуральным числом.
Очевидно, что приведенные выше рассуждения по разложению одной объемной фигуры на две другие объемные фигуры, будут действительны при любой высоте, которую мы зададим, при условии, что эта высота будет являться целым числом. Исходя из этого, мы можем вместо высоты z поставить в рассуждения высоту z^{n-2}.
Запишем формулу:

$$x^2 z^{n-2}+y_1^2 z^{n-2}=z^n \qquad (3)$$

Где n – натуральное число.
Формула (3) показывает, что, изменив высоту с z на z^{n-2} , вместо куба z^3 мы получили параллелепипед, имеющий в основании квадрат со стороной z, высота этого параллелепипеда равна z^{n-2}, объем параллелепипеда равен z^n. Параллелепипед с объемом z^n, в формуле (3) мы разложили на два параллелепипеда. В основании первого параллелепипеда лежит квадрат со стороной x, высота параллелепипеда равна z^{n-2}, объем этого параллелепипеда равен x^2z^{n-2} и этот объем, выраженный в численном виде, есть натуральное число.

В основании второго параллелепипеда лежит квадрат со стороной y_1, высота параллелепипеда равна z^{n-2}, объем этого параллелепипеда равен $y_1{}^2z^{n-2}$.
Так, как z^{n-2}–натуральное число, очевидно, что если y_1 – иррациональное число, то объем параллелепипеда $y_1{}^2z^{n-2}$ есть число иррациональное.
Однако, для нас неинтересен параллелепипед x^2z^{n-2}, для нас более важны значения, которые будет принимать x при преобразованиях. Поэтому, мы можем выделить из параллелепипеда x^2z^{n-2}, параллелепипед, в основании которого лежит квадрат со стороной x и имеющий высоту x^{n-2}. Объем такого параллелепипеда будет равен x^n.
Таким образом, мы разделили параллелепипед $x^2 z^{n-2}$ на два параллелепипеда – один с основанием x^2 и высотой x^{n-2} , объем которого равен x^n, и второй параллелепипед с основанием x^2 и высотой z^{n-2}–x^{n-2} объем которого равен $x^2(z^{n-2}–x^{n-2})$. Общий объем параллелепипеда z^n будет равен

$$z^n =x^n + x^2 (z^{n-2} –x^{n-2}) + y_1^2z^{n-2} \qquad (4)$$

Формула (4) показывает, что параллелепипед, с основанием z^2, высотой z^{n-2} и объемом z^n состоит из трех параллелепипедов - x^n, $x^2(z^{n-2} –x^{n-2})$ **и** $y_1^2z^{n-2}$.
Приведенные выше рассуждения очевидны и напрямую следуют из теоремы Пифагора.

Мы дошли до той части рассуждений, в которой можем уже делать какие – либо предположения. Например, мы можем предположить, что существует выражение:

$$z^n= x^n+ y^n \qquad (5)$$

Рассмотрим значения, которые может принимать y^n при выполнении заложенных выше условий, т.е., когда z и x – натуральные числа. Для этого применим формулу (4). В этой формуле мы уже вывели значения z^n и x^n. Если сравнить формулы (4) и (5), то получается, что значение y^n должно быть равно оставшейся части от вычитания x^n из z^n.
Запишем:

$$y^n = z^n - x^n = x^2 (z^{n-2} –x^{n-2}) + y_1^2z^{n-2} \qquad (6)$$

Формула (6) показывает, что значение y^n должно состоять из суммы значений объемов двух параллелепипедов - $x^2(z^{n-2}–x^{n-2})$ и $y_1^2z^{n-2}$. Ранее мы установили, что объем

параллелепипеда $x^2(z^{n-2}–x^{n-2})$ из условия задачи всегда есть натуральное число, объем параллелепипеда $y_1^2z^{n-2}$ может быть натуральным числом, если y_1 есть число натуральное, или иррациональным числом, если y_1 есть число иррациональное. Легко понять, что если одно из слагаемых будет иррациональным числом, а второе слагаемое есть натуральное число, то сумма этих слагаемых будет иррациональным числом. Из этого следует, что y может быть числом натуральным только в том случае, если y_1 есть натуральное число.
Очевидно, что x, y_1 и z одновременно будут целыми числами только в том случае, если x, y_1 и z – пифагоровы числа.
Рассмотрим, в каких случаях будет выполняться это условие.

1.*Предположим, что z - четное число.*
Мы знаем, что невозможно разложить квадрат, сторона которого есть четное натуральное число на два целых квадрата.
Из этого следует, что при любом четном значении z, значение y_1 всегда будет иррациональным числом, при условии, что z и x – натуральные числа. Следовательно, объем параллелепипеда $y_1^2z^{n-2}$ не может быть выражен натуральным числом, значит, из формулы (6), y^n не может быть натуральным числом. Очевидно, что y при этом не может быть натуральным числом.

2. Предположим, что z - простое нечетное число.
Известно, что, если простое число имеет вид 4t+1, то это число быть Пифагоровым. Очевидно, что в этом случае, будут существовать натуральные значения y_1, при которых объем параллелепипеда $y_1^2z^{n-2}$ будет выражен через натуральное число. Из этого следует, что значение y^n (формула 6) будет являться натуральным числом и y ***может быть*** числом натуральным.
Примем, что y_1 – натуральное число. Значение y^n в этом случае является числом натуральным, что следует из формулы (6). Значение y^n мы можем представить геометрически в виде параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат со стороной y и имеющий высоту y^{n-2}.
Квадрат y^2 мы можем вписать в основание z^2 параллелепипеда z^n. В этом случае, из теоремы Пифагора, должно существовать значение x_1, при котором будет выполняться условие

$$x_1^2+y^2=z^2 \tag{7}$$

Используя формулу (7), параллелепипед z^n можно представить в виде суммы двух параллелепипедов – один с основанием x_1^2 и высотой z^{n-2}, второй с основанием y^2 и высотой z^{n-2}.

$$x_1^2 z^{n-2}+y^2z^{n-2}=z^n \tag{8}$$

Из параллелепипеда y^2z^{n-2} выделим параллелепипед с основанием y^2 и высотой y^{n-2}.
Мы получим, что параллелепипед y^2z^{n-2} состоит из двух параллелепипедов – параллелепипеда с основанием y^2, высотой y^{n-2}, объемом y^n, и параллелепипеда с основанием y^2, высотой z^{n-2}-y^{n-2}, и объемом $y^2(z^{n-2}-y^{n-2})$.
Общий объем параллелепипеда z^n составит:

$$z^n =y^n + y^2 (z^{n-2} –y^{n-2}) + x_1^2z^{n-2} \tag{9}$$

Из формул (5) и (9) следует

$$x^n = z^n- y^n = y^2 (z^{n-2} –y^{n-2}) + x_1^2z^{n-2} \tag{10}$$

Из формулы (10) следует, что если x_1 будет иррациональным числом, то x^n не может быть натуральным числом, что противоречит условию задачи.
Из рассуждений выше следуют необходимые условия, при которых значения x и y будут натуральными:
- Для того, чтобы значение y было натуральным, необходимо, чтобы значение y_1 было натуральным числом.

- *Для того, чтобы значение* $\boldsymbol{x}$ *было натуральным, необходимо, чтобы значение* $\boldsymbol{x_1}$ *было натуральным числом.*
И это необходимые условия.
Таким образом, чтобы выполнялось условие целостности $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ для одного заданного значения z должны существовать две пифагоровы тройки, основанные на одном значении z.
Мы знаем, что простые нечетные числа вида 4t+1 представляются в виде суммы квадратов *единственным способом*.
Это легко доказать.
Любая примитивная пифагорова тройка ($\boldsymbol{x, y, z}$) однозначно представляется в виде
$\boldsymbol{m^2-n^2;\ 2mn;\ m^2+n^2}$
Где $\boldsymbol{z=m^2+n^2}$, $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ – натуральные взаимно простые числа.
Мы приняли, что z **-** простое нечетное натуральное число.
Из теоремы Ферма – Эйлера известно, что *простые* нечетные числа вида 4t+1 представляются в виде суммы квадратов *единственным способом*, следовательно, для равенства $\boldsymbol{z=m^2+n^2}$ имеется только одна пара чисел $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$**.** Из этого следует, что мы можем иметь только одно значение $\boldsymbol{x=m^2-n^2}$ и $\boldsymbol{y=2mn}$**.**
Следовательно, мы не имеем других вариантов выполнения необходимых условий натуральности чисел, кроме как в случае $\boldsymbol{x=x_1\ y=y_1}$.
Знал ли об этой зависимости Пьер Ферма? Без сомнения! Известно, что утверждение о том, что простое число можно представить в виде суммы двух целых квадратов только в том случае, если это число нечетное, точнее, оно должно при делении на 4 давать в остатке 1, сформулировал именно Ферма в 1640 году и потом, через сто лет, это утверждение доказал Эйлер. Нам это известно как теорема Ферма-Эйлера.
Это говорит о том, что Пьер Ферма знал об этой зависимости.
Таким образом, мы пришли к выводу, что для того, чтобы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в уравнении (5) были натуральными числами, необходимо выполнение условия $\boldsymbol{x=x_1\ y=y_1}$.
В этом случае уравнение (4) примет вид
$z^n = x^n + x^2\,(z^{n-2} - x^{n-2}) + y^2 z^{n-2}$
$y^n < y^2 z^{n-2}$
Из этого следует
$x^n + y^n \neq x^n + x^2\,(z^{n-2} - x^{n-2}) + y^2 z^{n-2}$
Уравнение (9) примет вид
$z^n = y^n + y^2\,(z^{n-2} - y^{n-2}) + x^2 z^{n-2}$
$x^n < x^2 z^{n-2}$
Из этого следует
$x^n + y^n \neq y^n + y^2\,(z^{n-2} - y^{n-2}) + x^2 z^{n-2}$
Таким образом, мы пришли к выводу, что при любом простом нечетном натуральном значении z вида 4t+1 не существует натуральных значений $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, при которых имеется решение уравнения
$z^n = x^n + y^n$.
Очевидно, что если нечетное z не имеет вид 4t+1, то при этом также не будет решений в натуральных числах, т.к. это число нельзя разложить на пифагоровы тройки.

3. Предположим, что z - составное число, обозначим его как $z_1 = zk$ где z - простое нечетное натуральное число, $\boldsymbol{k}$ – натуральное число.
Возведем это число в степень $\boldsymbol{n}$, и получим число z_1^n, которое геометрически можно представить в виде параллелепипеда, в основание которого лежит квадрат со стороной z_1 и имеющего высоту z_1^{n-2}.
Допустим, нам нужно разложить на z_1^n два числа - x^n *и* y^n по формуле
$z_1^n = x^n + y^n$ (5)

Примем, что x^n – натуральное число, которое можно представить в виде параллелепипеда с основанием x^2 и высотой x^{n-2}. Параллелепипед x^n есть часть параллелепипеда z_1^n, и основание x^2 есть составная часть основания z_1^2.
Однако, параллелепипед z_1^n можно представить также в виде

$$z_1^n=(zk)^n= z^n k^n = z^2 z^{n-2} k^n \qquad (11)$$

Формула (11) показывает, что число вида z_1^n можно представить геометрически в виде параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат z^2 и имеющего высоту $z^{n-2}k^n$. Сторона квадрата z – простое нечетное натуральное число.
Очевидно, что и в этом случае x^n, будет частью параллелепипеда z_1^n, но основание параллелепипеда x^n будет другое и это основание будет частью основания z^2. Так, как мы приняли, что – x^n натуральное число, то мы можем принять основание параллелепипеда x^n в виде квадрата, сторона которого есть натуральное целое положительное число, назовем его x_1. В этом случае, объем параллелепипеда x^n можно представить в виде $x_1^2 a$, где a – высота параллелепипеда $x^n= x_1^2 a$. Необходимо отметить, что a – может быть как целым, так и дробным числом, однако, в любом случае a – рациональное число. Значение x_1 мы можем задать произвольно, руководствуясь только тем, что это число должно быть целым и быть меньше z.
Из теоремы Пифагора должно существовать соотношение:

$$x_1^2+y_1^2=z^2 \qquad (12)$$

Параллелепипед z_1^n мы можем разложить на два параллелепипеда – один параллелепипед, в основании которого лежит квадрат со стороной x_1 и имеющего высоту $z^{n-2}k^n$, и второй параллелепипед, в основании которого лежит квадрат со стороной y_1 имеющего высоту $z^{n-2}k^n$, при условии, что $x_1^2+y_1^2=z^2$.
Таким образом, объем параллелепипеда z_1^n будет состоять из объемов двух параллелепипедов, что можно записать в виде формулы:

$$z_1^n = z^2 z^{n-2}k^n= x_1^2 z^{n-2}k^n +y_1^2 z^{n-2}k^n \qquad (13)$$

Нетрудно заметить, что правая и левая части формулы легко сокращаются на k^n, и в итоге мы получаем уравнение

$$z^n= x_1^2 z^{n-2}+y_1^2 z^{n-2} \qquad (14)$$

В котором z – простое нечетное натуральное число.
Или

$$z_1^n/ k^n = z^n= x^n /k^n +y^n/k^n \qquad (15)$$

Очевидно, что при сокращении формулы (13) пропорционально в k^n раз сократился и объем параллелепипеда $x^n/ k^n = x_1^2 a/ k^n$ таким образом, что высота a уменьшится в k^n раз и будет равна некоей высоте b, где $b = a/ k^n$. При этом b может быть как целым, так и дробным числом, но в любом случае b - рациональное число. Аналогично y^n сократится в k^n раз.
Параллелепипед $x_1^2 z^{n-2}$ мы можем разложить на два параллелепипеда - $x_1^2 b$ и $x_1^2(z^{n-2}-b)$
Где $x_1^2 b = x^n/ k^n$.
Объем параллелепипеда z^n будет равен сумме объемов трех параллелепипедов $x_1^2 b$, $x_1^2(z^{n-2}-b)$ и $y_1^2 z^{n-2}$

$$z^n= x_1^2 b +x_1^2(z^{n-2}-b)^2+y_1^2 z^{n-2} \qquad (16)$$

Исходя из того, что x_1^2 – натуральное число, b - рациональное число, следует, что $x_1^2 b$ – рациональное число. Из этого можно сделать вывод, что $x_1^2(z^{n-2}-b)^2$– рациональное число.
Если $x_1^2 b = x^n/ k^n$, то из формулы (15) следует, что

$$y^n/k^n= x_1^2(z^{n-2}-b)^2+y_1^2 z^{n-2} \qquad (17)$$

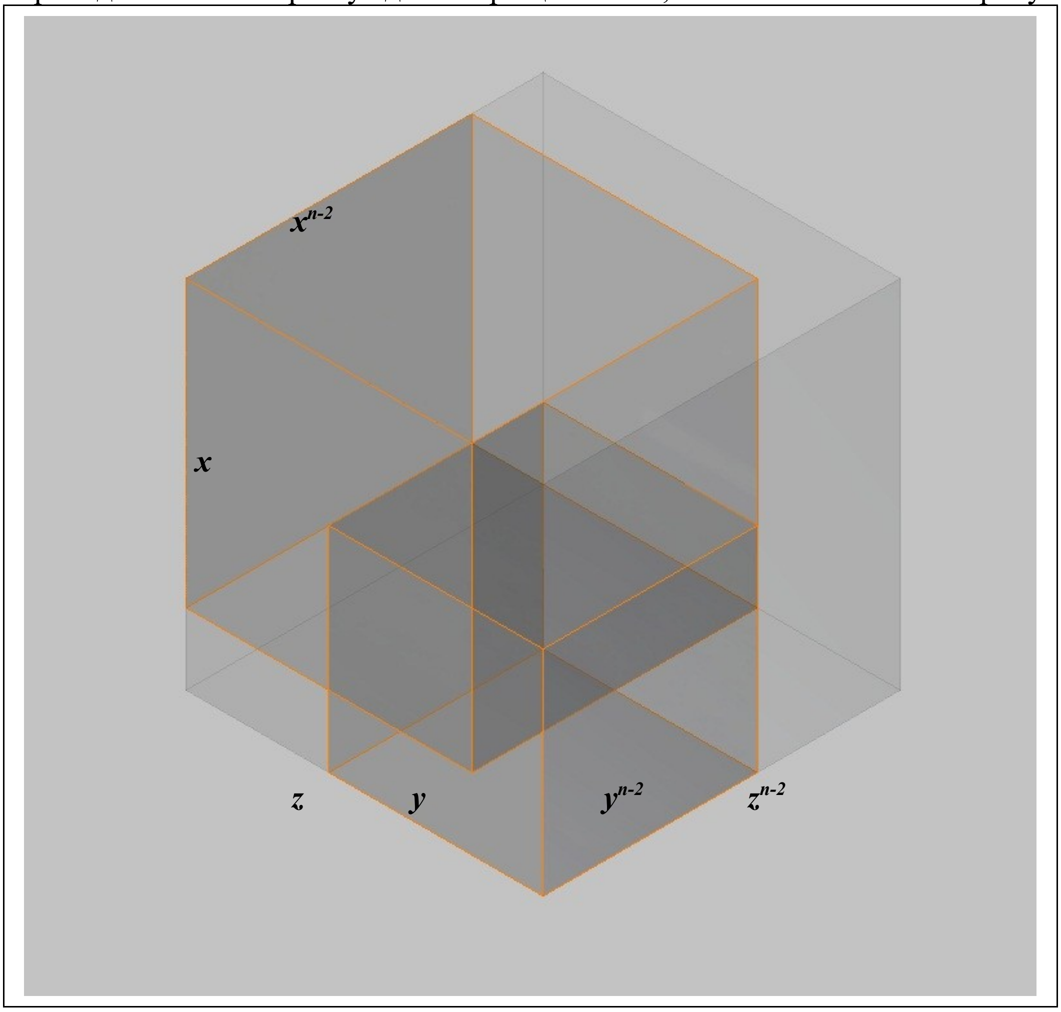
Из формулы (17) видно, что если y_1 – натуральное число, то y^n/k^n может быть рациональным числом. Если y_1 – иррациональное число, то y^n/k^n будет иррациональным числом, из чего следует, что, если y_1 – иррациональное число, то y^n не может быть рациональным числом.
Условия, при которых y_1 – натуральное число для нечетного целого положительного числа z вида 4t+1 мы рассмотрели выше и установили, что при любом простом нечетном

натуральном значении z вида 4t+1 не существует натуральных значений x и y, при которых имеется решение уравнения

$z^n = x^n + y^n$.

Мы рассмотрели все возможные варианты.

Приведенные выше рассуждения проще понять, если воспользоваться рисунком:



Так, как, z не может принимать других натуральных значений, мы пришли к выводу, что уравнение $z^n = x^n + y^n$ не имеет решений в целых положительных числах при $n > 2$.

Как мы видим из приведенных рассуждений, значение n никаким образом не влияет на доказательство теоремы, доказательство легкое и простое – ***удивительное***, как сказал о нем Пьер Ферма. И это действительно удивительное доказательство, решение которого полностью основано на тех знаниях, которыми обладал Пьер Ферма.

Надеюсь, после этого, ни у кого не возникнет сомнений в том, что Ферма знал доказательство теоремы, которую впоследствии назвали Большая Теорема Ферма.

г. Новосибирск — Александр Митьковский

Россия — mitkovskiy@gmail.com