the general science journal

«Последняя загадка» Пьера Ферма

Большая (Последняя) Теорема Ферма…
Более трех с половиной веков эта загадка не давала покоя сотням и тысячам математиков. Эту теорему Пьер Ферма сформулировал на полях «Арифметики» Диофанта. В настоящее время теорема доказана с помощью современных математических методов и интерес к ней постепенно угас. Однако доказательство теоремы Ферма не дало ответ на две загадки: первая - имеется ли простое доказательство этой теоремы; и вторая - действительно ли Пьер Ферма знал это простое доказательство? Казалось бы, что мы никогда не найдем ответ на эти вопросы, во всяком случае на второй из них.
В данной работе я постараюсь дать ответ на оба эти вопроса.

Имеется уравнение

$$x^n+y^n = z^n \tag{1}$$

Где n – натуральное число.
Представим z^n в виде

$$z^n=z^2*z^{n-2} \tag{2}$$

Формула (2) показывает, что в основании гиперкуба z^n лежит квадрат со стороной z.

Для известного числа x обязательно должно существовать число y_1, при котором будет выполняться условие

$$x^2+y_1^2=z^2 \tag{3}$$

Подставим формулу (3) в формулу (2)

$$z^n= (x^2+y_1^2)z^{n-2} \tag{4}$$

Значение z^{n-2} можно представить в виде

$$z^{n-2}=x^{n-2} + (z^{n-2} -x^{n-2}) \tag{5}$$

$$z^{n-2}= y_1^{n-2} + (z^{n-2} -y_1^{n-2})$$

На первый взгляд кажется, что формулы (5) бессмысленны, но это не так. Первая формула показывает, что сторона z^{n-2} гиперкуба z^n состоит из отрезка x^{n-2}, который является стороной гиперкуба x^n, и остального расстояния, которое равно $z^{n-2} -x^{n-2}$. Вторая формула, соответственно, показывает, что сторона z^{n-2} гиперкуба z^n состоит из отрезка y_1^{n-2}, и остального расстояния, которое равно $z^{n-2} -y_1^{n-2}$.
Подставим выражения (5) в формулу (4). Чтобы было понятно, что куда вставляется, формулы (5) выделены

$$z^n= (x^2+y_1^2)z^{n-2}= x^2\, \underline{z^{n-2}}+y_1^2\, \underline{z^{n-2}}= x^2\, \underline{(x^{n-2} + (z^{n-2} -x^{n-2})})+ y_1^2\, \underline{(y_1^{n-2} + (z^{n-2} -y_1^{n-2})})= \tag{6}$$
$$=x^n+ x^2 (z^{n-2} -x^{n-2}) + y_1^n + y_1^2 (z^{n-2} -y_1^{n-2})$$

Подставим формулу (6) в формулу (1) и установим, чему равно значение y^n

$$y^n =z^n - x^n$$

$$y^n= x^n + x^2 (z^{n-2} -x^{n-2}) + y_1^n + y_1^2 (z^{n-2} -y_1^{n-2}) - x^n = x^2z^{n-2} -x^n + y_1^n + y_1^2 z^{n-2} -y_1^n=$$
$$= x^2z^{n-2}+ y_1^2 z^{n-2} -x^n \tag{7}$$

Формула (7) показывает зависимость значения y^n от значения y_1.

Для известного числа y должно существовать число x_1, при котором будет выполняться условие:

$$x_1^2+y^2=z^2 \tag{8}$$

Подставим формулу (8) в формулу (2)

$$z^n= (x_1^2+y^2)z^{n-2} \tag{9}$$

Число z^{n-2} можно представить в виде

$$z^{n-2}=x_1^{n-2} + (z^{n-2} -x_1^{n-2}) \tag{10}$$

$z^{n-2}= y^{n-2} + (z^{n-2} - y^{n-2})$

Подставим выражения (10) в формулу (9)

$$z^n= (x_1^2+y^2)z^{n-2}= x_1^2 z^{n-2}+y^2z^{n-2}= x_1^2 \ (x_1^{n-2} + (z^{n-2} - x_1^{n-2}))+ y^2 (y^{n-2} + (z^{n-2} - y^{n-2}))= \quad (11)$$

$$=x_1^n+ x_1^2 (z^{n-2} - x_1^{n-2}) + y^n + y^2 (z^{n-2} - y^{n-2})$$

(Аналогично формулам (5) и (6))

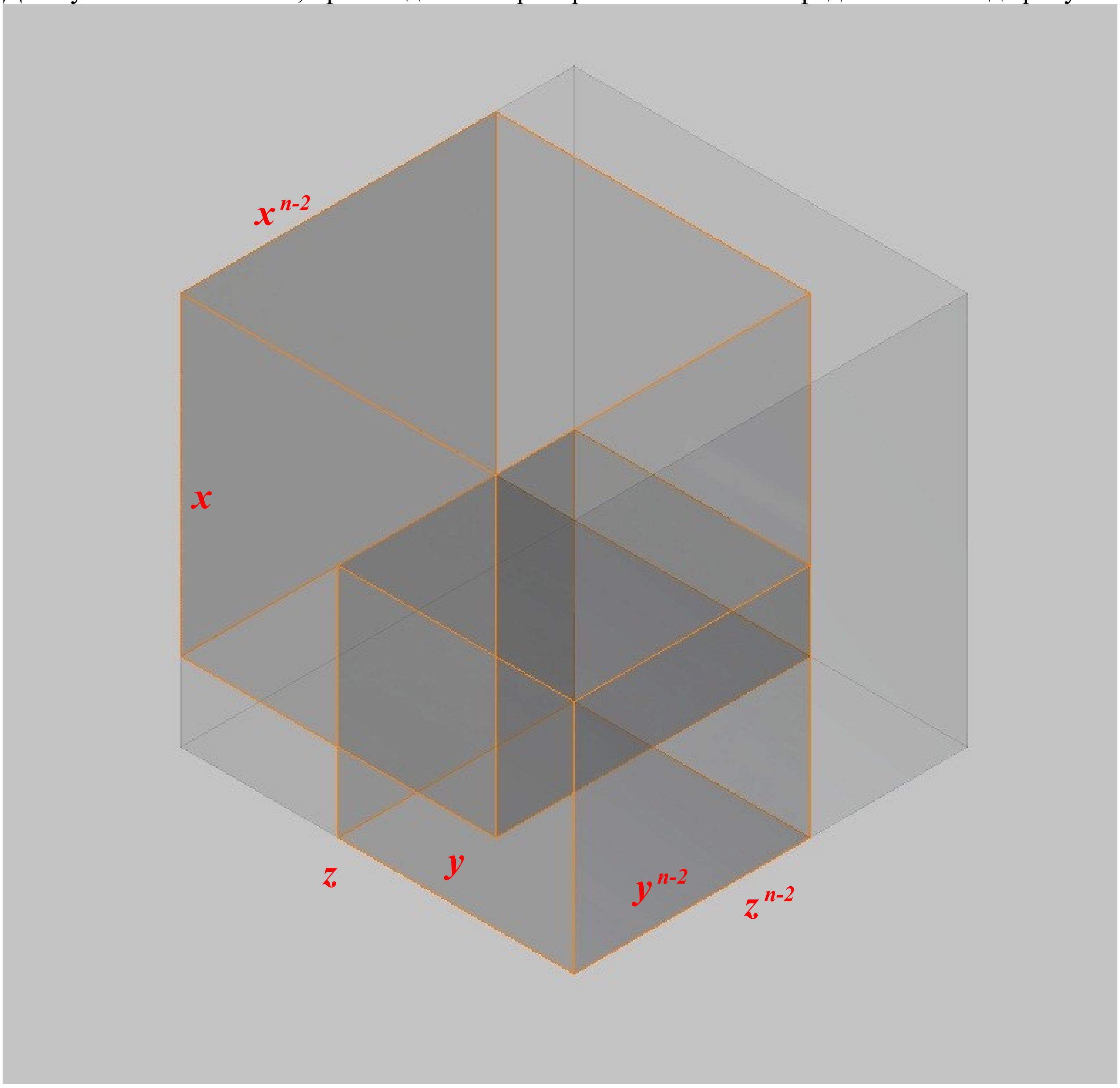
Подставим формулу (11) в формулу (1) и установим, чему равно x^n.

$x^n = z^n - y^n$

$$x^n = x_1^2 z^{n-2} + y^2 z^{n-2} - y^n \quad (12)$$

Формула (12) показывает зависимость значения x^n от значения x_1.

Для лучшего понимания, произведенные преобразования можно представить в виде рисунка



При поведении выше преобразований мы не давали ограничений по значениям x,y и z.
Рассмотрим преобразования, приняв, что x, y и z – натуральные числа.

Первое. Рассмотрим формулу (7).

Примем, что x и z – натуральные числа. Первым условием того, что y – натуральное число является то, что y^n является натуральным числом. Если y^n не является натуральным числом, то y не может быть натуральным числом. Это очевидно.

Формула (7) включает в себя несколько слагаемых. Исходя из условия, что x и z – натуральные числа, в формуле (7) x^2z^{n-2} - натуральное число, x^n – натуральное число. Остается установить, является ли y_1 натуральным числом?

Известно, что условием того, чтобы уравнение вида $x^2+y^2=z^2$, имело верные решения, должно выполняться тождество

$$(m^2-n^2)^2+4m^2n^2=(m^2+n^2)^2 \qquad (13)$$

Мы приняли, что z – натуральное число, следовательно, для числа z должны существовать два целых числа m и n, при которых будет выполняться равенство

$z = m^2+n^2$

Соответственно, для формулы (3), должны выполняться равенства

$$x=m^2-n^2;\ y_1 =2mn;\ где\ z=m^2+n^2 \qquad (14)$$

Исходя из того, что значение $y_1 =2mn$ получено произведением натуральных чисел следует, что y_1 – натуральное число, значит, y^n в формуле (7) – натуральное число.

Таким образом, мы установили, что при соблюдении рассмотренных выше условий, y^n в формуле (7) является натуральным числом, значит, y может быть натуральным числом.

Второе. Рассмотрим формулу (12).

Примем, что y и z – натуральные числа. Первым условием того, что x – натуральное число является то, что x^n является натуральным числом. Если x^n не является натуральным числом, то x не может быть натуральным числом.

Формула (12) включает в себя несколько слагаемых. Исходя из условия, что y и z – натуральные числа, в формуле (12) y^2z^{n-2} - натуральное число, y^n – натуральное число.

Остается установить, является ли x_1 натуральным числом?

Мы приняли, что z – натуральное число, следовательно, для числа z должны существовать два целых числа m_1 и n_1, при которых будет выполняться равенство

$z = m_1^2+n_1^2$

Для того, чтобы выполнялось условие формулы (13), должны существовать равенства

$$x_1=m_1^2-n_1^2;\ y =2m_1n_1;\ где\ z=m_1^2+n_1^2 \qquad (15)$$

Исходя из того, что значение $x_1=m_1^2-n_1^2$ получено путем действий над целыми числами, можно сделать вывод, что x_1 – натуральное число, значит, x^n в формуле (12) – натуральное число.

Таким образом, мы установили, что при соблюдении рассмотренных выше условий, x^n в формуле (12) является натуральным числом, значит, x может быть натуральным числом.

Третье. Рассмотрим формулы (7) и (12) в совокупности.

Известно и доказано, что никакое простое число не может быть представлено в виде суммы квадратов двух целых чисел двумя и более, существенно разными (т. е. не получающимися один из другого перестановкой слагаемых) способами.

Известно и доказано, что для того, чтобы уравнение $x^2+y^2 = z^2$ имело хотя бы одно решение в натуральных числах x, y необходимо и достаточно, чтобы число z имело, по меньшей мере, один делитель вида $4t + 1$, где t –целое число. То, есть число z должно быть либо простым числом, либо простым числом, умноженным на целое число.

Из этого следует, что не может быть двух различных пар чисел m и n, m_1 и n_1, из которых может быть составлено число z.

Значит, $m_1=m,\ n_1 = n.$

Из этого делаем вывод, что значения n и n_1, m и m_1, в соотношениях (14) и (15) равны между собой, значит $x=x_1\ y=y_1$.

Из этого следует, что уравнения (3) и (8) одновременно могут быть верны в натуральных числах, ***только если*** $x=x_1\ y=y_1$. Если эти условия не будут выполняться, то одно из уравнений (3) и (8) не будет иметь верного решения в натуральных числах.

В случае $x=x_1\ y=y_1$ формулы (6) и (11) примут вид

$$z^n =x^n+ y^n + x^2 (z^{n-2} -x^{n-2}) + y^2 (z^{n-2} -y^{n-2})$$

$$z^n = x^2z^{n-2} + y^2z^{n-2} \qquad (16)$$

Остается сравнить формулы (16) и (1).

$$x^2z^{n-2} + y^2z^{n-2} \neq x^2\ x^{n-2} + y^2\ y^{n-2}$$

Очевидно, что формула (16) не может быть равна формуле (1), кроме, как для случая, когда $n=2$. В этом случае формула (16) примет вид

$$z^2 * z^{n-2} = x^2 z^{n-2} + y^2 z^{n-2}$$

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Из этого следует, что выражение $x^n+y^n = z^n$ не может иметь решений в натуральных числах при $n>2$.

Теорема доказана.

Примечание.

Имеются пифагоровы тройки, значения z которых равны между собой.
Например:
7, 24, 25
15, 20, 25
Мы видим, что в этих тройках значение z равны между собой, но x и y различны. На первый взгляд, кажется, что такие тройки не укладываются в приведенное выше доказательство.
На самом деле, внимательно посмотрев на вторую из приведенных пифагоровых троек, нетрудно заметить, что она является не простой тройкой, а составной и имеет вид
15=3*5, 20=4*5, 25=5*5,
То есть, получена из простой пифагоровой тройки ***3, 4, 5.***
Уравнение суммы степеней имеет вид:

$$(3*5)^n + (4*5)^n = (5*5)^n$$

После сокращения на 5^n получаем простое уравнение.

$$3^n + 4^n = 5^n$$

К этому уравнению мы можем применить доказательства, изложенные выше.
В общем виде такие уравнения, основанные на составных пифагоровых тройках, будут иметь вид:

$$(x*i)^n + (y*i)^n = (z*i)^n$$

После сокращения на i^n уравнение примет вид

$$x^n+y^n = z^n$$

Где i – целое положительное число, z – простое число или число, полученное умножением простого числа на целое число.
В общем виде формула (13) для таких чисел будет иметь вид

$$(m^2-n^2)^2 i^2+4m^2n^2 i^2=(m^2+n^2)^2 i^2, \text{ где } i = 1,2,3\ldots i$$

И не противоречит предложенному выше доказательству.

Заключение

После того, как я нашел и сформулировал представленное выше решение, мне стала совершенно понятна логика Ферма в тот момент, когда он сформулировал свою знаменитую Теорему.
Я думаю, что, изучая восьмую задачу Диофанта, в которой рассматривается вопрос разложения квадрата на два целых квадрата, Пьер Ферма задал себе простой вопрос: «Как будут выглядеть эти преобразования, если к рассматриваемому квадрату добавить еще одну сторону, и получить куб (гиперкуб)?» Из этого вопроса логически следует следующий вопрос: «Что будет, если хотя бы одно из чисел при этом будет целым и положительным?».
Ответ на эти вопросы очевиден и изложен выше.
Из этого можно сделать вывод, что Пьер Ферма, без сомнения, знал доказательство Теоремы, при этом, возможно, даже не счел необходимым записать его позже, в связи с простотой.

г. Новосибирск 2010 г.