the general science journal

转盘佯谬分析

Analysis of the Relativistic Rotating Disk Paradox

刘宇晖（Liuyuhui30000@sina.com）

Abstract: This article analyzes the cause of the rotating disc paradox, and questions the invariable nature of the speed of light in the Lorentz transformation.

摘要：本文分析了引起转盘佯谬的概念根源，明确了在洛伦兹变换中存在曲线 c 不变的性质，提出因果事件的多路径定义，运用变极限洛伦兹变换消除了佯谬，并对 c 是否代表光速提出质疑。

关键词：曲线　因果　多路径　超光速　变极限

转盘佯谬，源于爱因斯坦的一个思想实验[1]，在广义相对论的创立过程中，这个思想实验在爱因斯坦的思想发展中占有一个重要位置，通过这个思想实验，爱因斯坦发现在加速系中似乎不能赋予时间和空间量的可操作的意义，他的“同时性概念”也遇到困难，无法在加速系中定义，为此，他困惑了许久，终于放弃直接推广狭义相对论的路线，另起炉灶，在广义协变和等效原理的指导下，启用复杂的数学工具，建立了广义相对论[2]。也因此，使狭义理论和广义理论之间出现了“不可通约”的意义断层。这里，我们不去对历史作考证，而是分析考证引起佯谬的概念根源，它就存在于狭义理论的体系之中。

概括的说，在爱因斯坦的思想实验中，他考虑在一个惯性系 k 中引入一个做匀速率(v)圆周旋转的转盘，按照狭义相对论，运动的圆周发生“尺缩”，所以，当运动的圆周与静止的圆周“同时”重合时，设在转盘中测得的相对惯性系旋转的圆周长为 s’，“同时”“重合”的静止的圆周长为 s（在惯性系中测得），则有：s’=s/根号下[1-（v 方/c 方）].s’>s。但是无论旋转的还是静止的圆周其半径 r 不变，在惯性系中，有 s/r=圆周率，因此，在转盘系 k’中，s’/r>圆周率。

爱因斯坦本人不认为这是荒谬的，他接受了这个结果，得出结论："这证明，在转动的圆盘上，或者普遍的说，在一个引力场中，欧几里得几何学的命题并不能严格的成立。"矛盾的是，爱因斯坦既然认为"在这个讨论的整个过程中，我们必须使用伽利略（无转动的）坐标系 k 作为参考物体，因为我们只能假定狭义相对论的结果相对于 k 才有效（相对于 k' 存在着引力场）"，那么，就不应该认为在转动系和惯性系之间进行洛伦兹变换或等价的使用由洛变换推出的"尺缩"公式是有效的。但是他的论证确实又依赖于此。

不必苛求古人，但问题需要搞清。旋转圆周是否发生了"尺缩"？洛变换是否可用？

在圆周上进行变换与通常的横轴变换确有相似之处，旋转的圆周与静止的圆周的相对运动发生在同一圆周线上，可以说是"共线"的，在圆周上可以定义顺时针与逆时针方向，就如横轴上定义正向与反向，匀速率旋转类似于匀速直线运动。进而需要提出如下问题：沿圆周上静置的相对论校准钟是否可以沿圆周用做圆周运动的光子做一致的校准？

这个问题使我们发现：洛变换既允许光沿直线运动，也允许光沿任一曲线运动，且存在曲线光速率不变的性质。可证明如下：在两个惯性系之间有不变量关系：x 方 +y 方+z 方-c 方 t 方=x'方+y'方+z'方-c 方 t'方，其微分形式为（dx）方+（dy）方+（dz）方-c 方（dt）方=（dx'）方+（dy'）方+（dz'）方-c 方（dt'）方，从微分形式看，既可以理解为直线运动，也可以理解为一般的曲线运动，因为曲线的弧长微分也正是 ds=根号下[（dx）方+（dy）方+（dZ）方]，以及 ds'=根号下[（dx'）方+（dy'）方+（dz'）方]，所以，当 ds=cdt,ds'=cdt'；积分后可得当 s=ct，有 s'=ct'。这样，即使在狭义 相对论中，光速不变也既包括直线运动又包括曲线运动，校准既可沿直线进行，也可沿曲线进行，两种校准方式不冲突。这似乎说明可以将洛变换用于爱因斯坦的思想试验。

设惯性系 k 系中的原点 o 正上方一米处的点 A(在 y 轴上)即静圆与动圆的共同圆心，两圆共同的半径为 1 米，两圆的圆周分别是两个圆形曲轴 u,u'，u'相对 u 以匀速率 v 逆时针旋转，两曲轴的原点与 k 的笛卡儿直角系原点 o 共同重合时，u'原点的动钟读数与 o 处的静钟读数都是 0，在此规定下，从原点开始，沿曲轴逆时针一路进行 k 系中的 0 时点的同时点变换，直至返回原点处。因此，按洛变换，在曲轴上，原点离它自己 2*3.14159265（米），在 u'轴上，其原点离它自己 2*3.14159265/根号下[1-（v 方/c 方）]（米），因是 k 中的同时点变换，在洛变换中同时点经转换不对应 k'中的同时点，因此 k 原点静置钟的 0 点又对应着 u'原点处的动钟（但相对 u'是静置的）的非零读数[（-v*2*3.14159265）/（c*c）]/根号下[1-（v 方/c 方）]。显然在动系原点处安置了两个钟，一个读数为 0，另一个不为 0，同样，k 系原点静钟的空间坐标也有两个，一个是 0，一个是 s。这本身并不构成矛盾，只要将 u 轴上坐标为 0 的原点和又赋予坐标为 s 的原点视为两个点，这种做法就是一贯的，两可的。但是爱因斯坦的想法违反了这一思维准则，将两个其实是一个但应理解为两个的原点理解为一个点，因此将变换的结果理解为首尾相连的动圆与静圆的重合，但正确的理解应为（虽然是两个弯折的）动杆与静杆的同时点对应，与在直线上进行的变换没什么两样，因此不等价于两圆"同时"重合，也不能对两圆周长度关系提出有意义的信息，根本与此无关。

尽管如此，洛变换能不能应用于曲轴呢？两圆周长关系究竟如何呢？

这和光速是否是极限速度有关。在相对论中，假定了光速是极限速度，因此，在曲径上的运动也被假定以光速为极限，这带来一个根本问题：两个异地事件是否可能存在因果关系，分别从连接两地的直路径和曲路径的视点来判断，会得出矛盾的结果。设连接 A,B 两地的直线长为 L，一条连接两地的曲径长 s，设事件 p 发生在 A 地，时点为 t；事件 q 发生在 B 地，时点为 t'，t'>t,在直路径判断，若[L/(t'-t)]>c，则 q 不能是 p

的果，对曲路径判断，若[s/(t’-t）]>c，则 q 不能是 p 的果。必然发生冲突。如果以直路径标准为统一的标准，那么，在曲径上进行的洛变换，其形式上的类时变换与类空变换都不是真正的类时与类空变换，曲径上的“类空”变换混杂的包含了因果事件与非因果事件，曲径“类时”变换也是如此。所以与直线洛变换比较，曲线变换只是形式上的套用，实质意义完全改变了。

不过，有理由使事件因果性的判断无论对哪一种路径都一致，正如已述，在洛变换中在某种意义上说有“曲直”不分的特点，校准曲直不分，光的运动曲直皆可，尤其是，在四周黑暗的曲径上运动的观察者依赖于在同一曲径上运动的光辨析一切，因此，他认为自己在做直线运动，他依赖于弯折的光线看见了曲径通幽的某地，他内禀的以为那地点就在正前方。如果我们表述非因果的标准是“直的路径”，他会理解为以他的路径为准。因此可以考虑适用于每一路径的定义。由于非因果事件是以极限定义的，所以需要引入超光速的极限速度，假设仍以相对论的光速最大为前提，但限定在直路径上，对于有共同两端点的曲径，令在这段曲径 s 上,极限速率为 C(s),C(s)/c=s/L,那么，发生在端点的事件 q 不能构成 p 之结果的判据沿曲径为 s/[t’-t]>C(s)，等价于我们从直路径的判断 L/[t’-t]>c。这样，一个在曲径上运动的物体其速度极限也在运动中改变着，因为不同的曲路段长度（“弓”）与所对应的直路径长度（“弦”）之比不一定是固定的。

与这规定相一致，需要假定：在曲径上的极限速度本身不对应真实的物理运动，就是说，是物体运动不可到达的。原因是，若不然，会出现，一物体在 s1 路段以该路段极限速度运动 ，在接下来的 s2 段以该路段极限速度运动，但在整个弧段看来，它并没有以整弧段的极限运动。做了极限不可达到的规定就避免了这种有趣而古怪的事。

按这定义，在闭回路上的极限速度为无穷大，因此无论从哪个回路判断，与某地一事件没有 因果关系的同地事件一定同时发生 。 尽管如此，洛变换也不可适用曲轴，因其极限固定为 c，为此，需要使用变极限洛变换，作者在文[3]中给出了一般形式，其单极限变量的形式按本文的符号表达为：

s=[s’+vt’]/根号下[1-v 方/C(s)方]

t={t’+vs’/[C(s)*C(s)]}/根号下[1-v 方/C(s)方]

将此变换应用于爱因斯坦的实验，令 s 代表静圆周上的空间弧长，s’代表旋转系对应弧上的空间度规， C(s)为两系对应弧段上的极限速度，仍按前述做同时点变换，由于按本文的因果定义，必然，对两系来说，在整个闭回路上的速度极限为无穷大，因此，对于整个圆周段成立的变换取 C(s)为无穷大，有：

s=s’+vt’

t=t’

因是同时点变换两圆“同时”重合，t=t’=0,s=s’，故圆周长相等。

如果我们按逆时针将静圆周分为 n 份,弧长为 s1，s2，...... sn,对每一份弧段仍做同时点变换，那么 C(sn)不是无穷大，而且同时点在每一段转换后不是同时点，每一份对应的动弧与静弧长度不同，n 份动弧相加总长与静圆周长不相等，但是按前面的说明，这总长不应理解为与整个静圆周同时完整重合的动圆周长，而且，按此方式延伸变换到的原点不再理解为与作为变换起点的原点同一，这样，佯谬就消失了。

最后，有必要指出，若像相对论那样，将 c 理解为光速，其实多路径定义与直路径以 c 为常数的非因果定义在极限速度的界点处并不等价。因为 C（s）是不可达到的，c 是可达到的。作者的观点是，c 在洛伦兹变换中是物体运动不可达到的极限常数，本身并不对应真实的物理运动。因此 c 不是光速。若将光速不变的以 c 为符号，那么在变换中的不变极限就不应用 c 这一符号表示。这样，光速就是可变的，充其量在一定的适用

范围可理解为接近极限。从洛变换本身的数学形式上看，由于收缩因子，两系速度不能等于C，是不可企及的，两个小于c的速度迭加后仍小于c，将c诠释为某一特定的真实的物理运动似乎有勉强不协调之感。

若c不是光速，则多路径定义是完全一致的。若两异地事件的距离与时差的比值大于或等于其极限速度，事件关系是非因果性的，若比值小于极限速度，则可以存在因果关系。这里“距离”指连接两地的任一路径，“极限速度”指在该路径上的速度极限。这样，由极限速度连接的两事件就归入类空范畴，而不是通常在相对论中那样，归入类时范畴，尽管作为分割类时与类空的交接点，将它归入哪一区间看上去区别不大。

参考文献：
[1]《狭义与广义相对论浅说》，A。爱因斯坦著，杨润殷译，P。65-P。67，上海科学技术出版社，1964年8月第一版。
[2]《激动人心的年代》，李醒民著，四川人民出版社，1983年11月第一版。
[3]双极限洛伦兹变换，刘宇晖，海明志杰博客，2009。8